令和６年度　解 答 例

数　学

I、IIのどちらかに○をつけること。

□ I ［中学校・特別支援学校受験者］
□ II ［高等学校受験者］

第１問題

問１	-4 （5点）			
問２	540（度） （5点）			
問３	(１)	126（通り） （4点）	(２)	33（通り） （4点）
問４	(１)	$(2x-y+2)(x+y+1)$ （4点）	(２)	$(1,\ 1),\ (-3,\ -1)$ （4点）
問５	$a<-4$ （5点）			
問６	$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$ （5点）			

Ⅰ［中学校・特別支援学校受験者］

第２問題

問１

（例１）

線分 AB をひき、△AOB をつくる。

A から y 軸に平行にひいた直線と x 軸との交点を H とする。

△AHO で、∠AHO＝90°、AH＝4、OH＝2

したがって、三平方の定理より

$OA^2=4^2+2^2=20$

同様に△BOK で $OB^2=1^2+2^2=5$

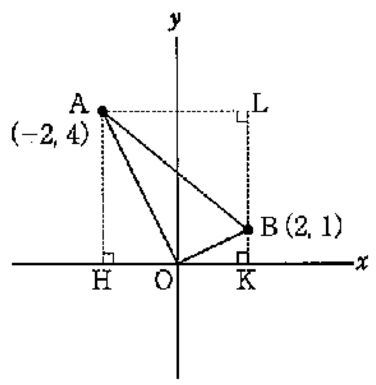
同様に△ABL で $AB^2=AL^2+BL^2=4^2+3^2=16+9=25$

△AOB で、$OA^2+OB^2=20+5=25$

$AB^2=25$

よって、$OA^2+OB^2=AB^2$ が成り立ち，三平方の定理の逆から

△AOB は AB を斜辺とする直角三角形である。つまり、∠AOB＝90°



（例２）

２点 A、B から y 軸に平行にひいた直線と x 軸との交点をそれぞれ C、D とする。

△AOC と△OBD で∠ACO＝∠ODB＝90°　…①

AC：OD＝4：2＝2：1、CO：DB＝2：1

よって、AC：OD＝CO：DB　…②

①、②より２組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいので

△AOC ∽△OBD

相似な図形では、対応する角の大きさは等しい

だから∠COA＝∠DBO　…③

△OBD で∠ODB＝90°なので、∠DOB＋∠DBO＝90°　…④

③、④より∠DOB＋∠COA＝90°　…⑤

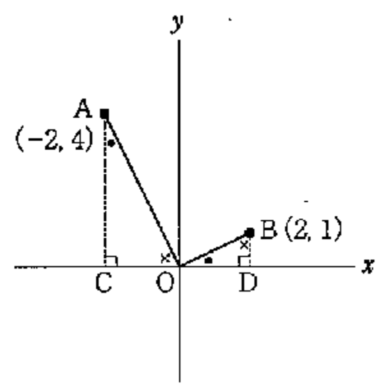
x 軸は一直線なので∠AOB＋∠DOB＋∠COA＝180°

⑤より∠AOB＋90°＝180°

∠AOB＝180°－90°

∠AOB＝90°

ゆえに∠AOB＝90°



（14 点）

Ⅱ［高等学校受験者］

第２問題

問１	OA$=x$、OD$=y$ とすると、OB$=b+y$、OC$=a-x$ であるから、 $\triangle ABD=\triangle ABO-\triangle ADO$ $=\frac{1}{2}x(b+y)\sin\theta-\frac{1}{2}xy\sin\theta$ $=\frac{1}{2}xb\sin\theta$ $\triangle CBD=\triangle CBO-\triangle CDO$ $=\frac{1}{2}(a-x)(b+y)\sin(180^\circ-\theta)-\frac{1}{2}(a-x)y\sin(180^\circ-\theta)$ $=\frac{1}{2}(a-x)b\sin\theta$ したがって、 $S=\triangle ABD+\triangle CBD$ $=\frac{1}{2}xb\sin\theta+\frac{1}{2}(a-x)b\sin\theta$ $=\frac{1}{2}ab\sin\theta$ となり、四角形 ABCD を凹四角形としても $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$ が成り立つ。 （10点）

第２問題問２は受験種別の解答欄になっている。
・中学校・特別支援学校受験者はⅠ［中学校・特別支援学校受験者］を解答すること。
・高等学校受験者はⅡ［高等学校受験者］を解答すること。

Ⅰ［中学校・特別支援学校受験者］

問２	選手Ｂの方が、最小値が大きく、範囲が小さいので、より安定して遠くへ投げそうだと考え、選手Ｂを選択している。（６点）

Ⅱ［高等学校受験者］

問２	

Ⅰ［中学校・特別支援学校受験者］

第３問題

問１	関数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ のグラフと関数 $y=2x-5$ のグラフとの交点は、 $-\frac{1}{4}x^2=2x-5$ $x^2+8x-20=0$ $(x+10)(x-2)=0$ $x=-10, 2$ より、A$(-10, -25)$、B$(2, -1)$となる。 直線BCは傾き１であるから、$y=x+b$ とおくと、点Bを通ることから、 $-1=2+b$ より $b=-3$、すなわち直線BCの式は $y=x-3$ となる。 直線BCと関数 $y=-\frac{1}{4}x^2$ のグラフとの交点は、 $-\frac{1}{4}x^2=x-3$ $x^2+4x-12=0$ $(x+6)(x-2)=0$ $x=-6, 2$ より、C$(-6, -9)$ となる。 点Cを通り y 軸に平行な直線と直線ABとの交点をDとすると、D$(-6, -17)$だから CD$=-9-(-17)=8$、点Aから直線CDまでの距離は$-6-(-10)=4$、 点Bから直線CDまでの距離は$2-(-6)=8$ $\triangle$ABC$=\triangle$CAD$+\triangle$CBD$=\frac{1}{2}\times 8\times 4+\frac{1}{2}\times 8\times 8=48$ より$\triangle$ABC$=48$ となる。 （12点）
問２	$\triangle$CAEと$\triangle$CBEは点Cを共有しているので高さが等しいため、 面積を３：１に分けるには、底辺をAE：EB＝３：１となるように点Eをとればよい。 A$(-10, -25)$、B$(2, -1)$なので、 点Eの x 座標は$-10+\frac{3}{4}\times(2-(-10))=-1$、$y$ 座標は$-25+\frac{3}{4}\times(-1-(-25))=-7$ となり、 E$(-1, -7)$である。 C$(-6, -9)$だから、直線CEの傾きは$\frac{-7-(-9)}{-1-(-6)}=\frac{2}{5}$となるから、 直線CEの切片を c とすれば、直線の式は $y=\frac{2}{5}x+c$ とおける。点Cを通るから、 $-9=\frac{2}{5}\times(-6)+c$ となり、$c=-\frac{33}{5}$とわかるので、 直線CEの式は $y=\frac{2}{5}x-\frac{33}{5}$である。 （10点）

Ⅱ［高等学校受験者］

第３問題

問１

１秒後に、点XがAにあるのは、移動しないときだから、

$$P_1=\frac{1}{2}$$

また、$n+1$秒後に、点XがAにある確率は、次の２つの場合がある。

ⅰ）n秒後に、点XがAにあるとき、

$\frac{1}{2}$の確率で移動しなければよいから、

$$\frac{1}{2}P_n$$

ⅱ）n秒後に、点XがAにないとき、

$\frac{1}{4}$の確率でAに移動すればよいから、

$$\frac{1}{4}(1-P_n)$$

ⅰ）、ⅱ）より　$P_{n+1}=\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{4}(1-P_n)$

よって、$P_{n+1}=\frac{1}{4}P_n+\frac{1}{4}$

（12点）

問２

問１の漸化式を変形すると、

$$P_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left(P_n-\frac{1}{3}\right)$$

よって、数列$\left\{P_n-\frac{1}{3}\right\}$は、初項$P_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$、公比$\frac{1}{4}$の等比数列となる。

したがって、$P_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$$P_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

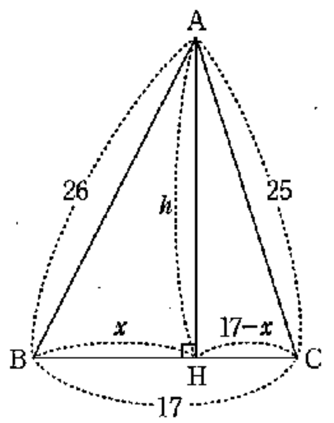
ゆえに、$\lim_{n\to\infty}P_n=\frac{1}{3}$

（10点）

I ［中学校・特別支援学校受験者］

第４問題

<table>
<tr><td>問１</td><td>三平方の定理を証明するには、$a^2+b^2=c^2$ が成り立つことを証明すればよい。
線分 AH$=x$ とすると、BH$=$AB$-$AH$=c-x$ である。
△CAH と△BAC において、仮定より∠AHC$=$∠ACB$=90°$、
　∠A は共通
したがって、２組の角がそれぞれ等しいので、△CAH ∽△BAC
よって、AH：AC$=$CA：BA　すなわち $x:b=b:c$
このことから、$cx=b^2$　…①
△BCH と△BAC において、仮定より∠CHB$=$∠ACB$=90°$、
　∠B は共通
したがって、２組の角がそれぞれ等しいので、△BCH ∽△BAC
よって、BH：BC$=$BC：BA　すなわち$(c-x):a=a:c$
このことから、$c(c-x)=a^2$ であるから、$c^2-cx=a^2$　…②
①、②より、$c^2-b^2=a^2$
よって、$a^2+b^2=c^2$ が成り立つ。

(12 点)</td></tr>
<tr><td>問２</td><td>A から BC に垂線をひき、BC との交点を H とする
BH$=x$、AH$=h$ とする
HC$=17-x$
△ABH で三平方の定理から
$AH^2+BH^2=AB^2$
$AH^2=AB^2-BH^2$
$h^2=26^2-x^2$　…①
△ACH で三平方の定理から
$AH^2+CH^2=AC^2$
$AH^2=AC^2-CH^2$
$h^2=25^2-(17-x)^2$　…②
①、②より $26^2-x^2=25^2-(17-x)^2$
$676-x^2=625-(289-34x+x^2)$
$676-x^2=625-289+34x-x^2$
$51+289=34x$
$34x=340$
$x=10$
①に代入 $h^2=26^2-10^2=676-100=576$
$h=24$
$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 17\times 24=204$


(10 点)</td></tr>
</table>

Ⅱ［高等学校受験者］

第４問題

問１

$f(x)=x\log x$ より、$f'(x)=\log x+1$

$f'(x)=0$ とすると、$\log x=-1$

$$x=\frac{1}{e}$$

よって、$x>0$ で $f(x)$ の増減を調べて、

x	0	…	$\frac{1}{e}$	…
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{e}$	↗

ここで、$t=\log x$ とおくと、

$x\to+0$ のとき、$t\to-\infty$ で、

$x=e^t$ となる。

$u=-t$ とおくと、

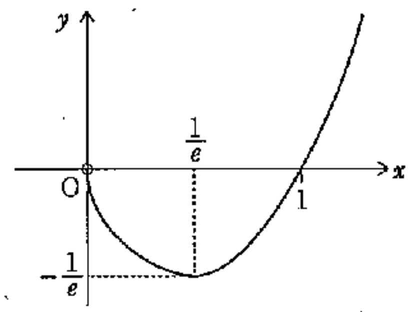
$t\to-\infty$ のとき、$u\to+\infty$ で、

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{t\to-\infty}e^t t$$
$$=\lim_{u\to+\infty}(-u)e^{-u}$$
$$=0$$

また、$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\infty$、$\lim_{x\to+0}f'(x)=-\infty$、

$f(x)=0$ とすると $x=1$　となる。

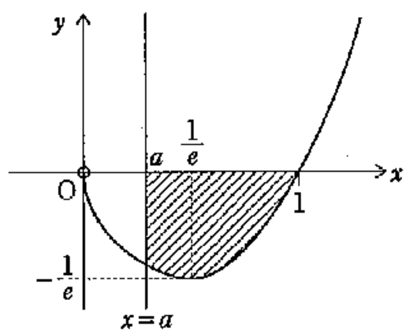
したがって、グラフは下のようになる。



(12点)

問２

問１よりグラフは下のようになるから、求める面積は図の斜線部分



よって、求める面積は

$$S(a)=-\int_a^1 f(x)dx$$
$$=-\left[\frac{x^2}{2}\log x\right]_a^1+\int_a^1\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$=-\left(-\frac{a^2}{2}\log a\right)+\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\right]_a^1$$
$$=\frac{a^2}{2}\log a+\frac{1}{4}(1-a^2)$$

ここで、問１から $\lim_{a\to+0}a\log a=0$ となるから、$\lim_{a\to+0}S(a)=\frac{1}{4}$

(10点)