令和５年度　解答例　　数　学　　

Ⅰ、Ⅱのどちらかに○をつけること。

□ Ⅰ［中学校・特別支援学校受験者］
□ Ⅱ［高等学校受験者］

第１問題

Ⅰ［中学校・特別支援学校受験者］

ア	見方・考え方 （２点）	イ	数学化 （２点）	ウ	論理的 （２点）
エ	統合的 （２点）	オ	問題解決 （２点）	カ	評価 （２点）

Ⅱ［高等学校受験者］

ア	見方・考え方 （２点）	イ	数学化 （２点）	ウ	論理的 （２点）
エ	統合的 （２点）	オ	問題解決 （２点）	カ	評価 （２点）

第２問題

問１	（およそ）700（個） （５点）	
問２	112.5（度） （５点）	
問３	$(a=)\ 3,4$ （６点）	
問４	最大値　$\frac{3}{2}$	最小値　0 （各３点）
問５	一般項　2^n-1	和　$2^{n+1}-n-2$ （各３点）

Ⅰ［中学校・特別支援学校受験者］

第３問題

<table>
<tr><td>問１</td><td>△ABEと△ACDで、
仮定より
　AB = AC　…①
　AE = AD　…②
∠Aは共通だから
　∠BAE =∠CAD　…③
①、②、③から、２組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので
　△ABE ≡△ACD
合同な図形では対応する角が等しいので
　∠ABE =∠ACD　…④
また、二等辺三角形ABCの２つの底角は等しいので
　∠ABC =∠ACB　…⑤
ここで、
　∠PBC =∠ABE −∠ABC
　∠PCB =∠ACD −∠ACB
よって、④と⑤から
　∠PBC =∠PCB
したがって、２つの角が等しいから△PBCは二等辺三角形である。
(10点)</td></tr>
<tr><td>問２</td><td>(生徒の発言について)
　生徒の発言は必ず正しいとは言えない。

(理由)
　男子のうち、値の小さいほうから数えて、３番目から５番目が8.0秒、６番目と７番目が8.2秒で、クラス全体のうち、値の小さいほうから数えて、３番目から７番目が8.0秒、８番目から11番目が8.2秒のとき、クラス全体では8.0秒以上8.2秒以下に９人で、そのうち男子は５人であり、女子が４人となるような場合があるから。
(10点)</td></tr>
</table>

Ⅰ［中学校・特別支援学校受験者］

第４問題

問１	関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフと関数 $y=x+3$ のグラフの交点は $\frac{1}{4}x^2=x+3$ $x^2-4x-12=0$ $(x+2)(x-6)=0$ $x=-2, 6$ より、A$(-2, 1)$、B$(6, 9)$ となる。 したがって、直線 AB と y 軸との交点を C とすると、C$(0, 3)$ であり $\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{OCA}+\triangle\mathrm{OCB}=\frac{1}{2}\times3\times2+\frac{1}{2}\times3\times6=12$　より $\triangle\mathrm{OAB}=12$　となる。 （10点）
問２	点Oを通り、２点A、Bを通る直線と平行な直線を ℓ としたとき、 直線 ℓ と関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフとの交点をPとすると、AB$/\!/\ell$ より△OAB＝△PAB となる。 よって $\ell: y=x$ より連立方程式 $\begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2 \\ y=x \end{cases}$ を解くと、$(x,\ y)=(0,\ 0),\ (4,\ 4)$ 点Pは点Oとは異なるのでP$(4,\ 4)$ また、点 $(0,\ 6)$ を通り、２点A、Bを通る直線と平行な直線を m としたとき、 直線 m と関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフの交点をPとすると、AB$/\!/m$ より△OAB＝△PAB となる。 よって $m: y=x+6$ より連立方程式 $\begin{cases} y=\frac{1}{4}x^2 \\ y=x+6 \end{cases}$ を解くと、 $(x,\ y)=(2\pm2\sqrt{7},\ 8\pm2\sqrt{7})$（複号同順） よって、P$(2\pm2\sqrt{7},\ 8\pm2\sqrt{7})$（複号同順） したがってP$(4,\ 4)$、$(2\pm2\sqrt{7},\ 8\pm2\sqrt{7})$（複号同順） （10点）

I［中学校・特別支援学校受験者］

第5問題

問1

正五角形の1つの内角の大きさは、$180° \times 3 \div 5 = 108°$ であり、
△ABE は二等辺三角形であるから、$\angle AEB = \angle ABE = (180° - 108°) \div 2 = 36°$　…①
同様に、△BCA で $\angle BAC = \angle BCA = (180° - 108°) \div 2 = 36°$　…②
△ABE と△PAB で、
①と②より
　$\angle AEB = \angle PBA = 36°$　…③
　$\angle ABE = \angle PAB = 36°$　…④
③、④から、2組の角がそれぞれ等しいので
　$\triangle ABE \backsim \triangle PAB$
相似な図形では対応する辺の比が等しいので
　$AB : PA = BE : AB$　…⑤
正五角形 ABCDE の対角線の長さを x とすると、△PAB は底角が36°で等しい二等辺三角形、
△EAP は底角が72°で等しい二等辺三角形であるから、
$PA = PB = BE - PE = BE - EA = x - 12$ となり、
⑤より、$12 : (x - 12) = x : 12$
　すなわち、$x(x - 12) = 144$
　この二次方程式を解くと、$x = 6 \pm 6\sqrt{5}$
　　$x > 0$ より $x = 6 + 6\sqrt{5}$
よって、対角線の長さは $6 + 6\sqrt{5}$

（10点）

問2

問1より、$\triangle ABE \backsim \triangle PAB$ であり、
その相似比は $(6 + 6\sqrt{5}) : 12 = (1 + \sqrt{5}) : 2$　となる。
よって、

$$\triangle ABE : \triangle PAB = (1 + \sqrt{5})^2 : 2^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} : 1$$

△PABの面積をSとすると、$\triangle ABE = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}S$　と表せる。
ここで、△ABE、△BCA、△PCE、△DECはいずれも二等辺三角形であり、
2つの底角が36°で、2つの底角を両端とする辺が $(6 + 6\sqrt{5})$ cm なので
　$\triangle ABE \equiv \triangle BCA \equiv \triangle PCE \equiv \triangle DEC$　となる。
よって、

$$\text{正五角形 ABCDE} = 4 \times \triangle ABE - \triangle PAB = 4 \times \frac{3 + \sqrt{5}}{2}S - S = (5 + 2\sqrt{5})S$$

　したがって、正五角形の面積は△PAB の $(5 + 2\sqrt{5})$ 倍である。

（10点）

Ⅱ [高等学校受験者]

第3問題

問1

$x=1+\sqrt{5}$ より　$x-1=\sqrt{5}$

両辺２乗して　$(x-1)^2=5$

$x^2-2x-4=0$

また、右の計算から

$x^3-x^2-6x+1=(x^2-2x-4)(x+1)+5$

$x=1+\sqrt{5}$ のとき　$x^2-2x-4=0$ だから

$x^3-x^2-6x+1=5$

$$\begin{array}{r|l} & x+1 \\ \hline x^2-2x-4 & x^3-x^2-6x+1 \\ & x^3-2x^2-4x \\ \hline & \quad x^2-2x+1 \\ & \quad x^2-2x-4 \\ \hline & \qquad\qquad 5 \end{array}$$

（１０点）

問2

【誤り】　一番左が$\boxed{1}$である事象には一番右が$\boxed{3}$である場合が、一番右が$\boxed{3}$である事象には一番左が$\boxed{1}$である場合が含まれているが、生徒は２つの事象が互いに排反であると考えていることが誤りである。

【正解】　一番左が$\boxed{1}$である事象をA、一番右が$\boxed{3}$である事象をBとすると、A∩Bは一番左が$\boxed{1}$で一番右が$\boxed{3}$である事象である。

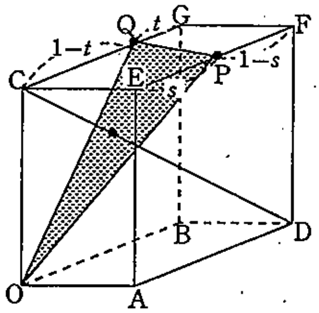
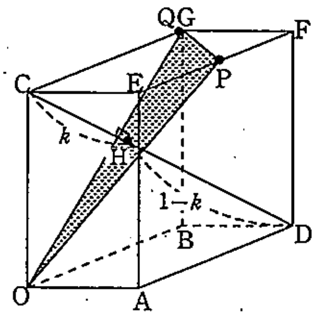
３つの数字の並べ方の総数は${}_6P_3$であり、$n(A)={}_5P_2$、$n(B)={}_5P_2$、$n(A\cap B)={}_4P_1$であるから、求める確率は

$$\begin{aligned} P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\ &=\frac{{}_5P_2}{{}_6P_3}+\frac{{}_5P_2}{{}_6P_3}-\frac{{}_4P_1}{{}_6P_3}\\ &=\frac{1}{6}\times2-\frac{1}{30}\\ &=\frac{3}{10} \end{aligned}$$

（１０点）

II［高等学校受験者］

第4問題

問1	$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$、$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$、$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とすると、$\|\vec{a}\|=1$、$\|\vec{b}\|=3$、$\|\vec{c}\|=2$、 $\overrightarrow{OP}=\vec{a}+s\vec{b}+\vec{c}$、$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\vec{b}+\vec{c}$、$\overrightarrow{CD}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ CD⊥△OPQ であるから $\begin{cases}\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{OP}\\ \overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{OQ}\end{cases}$ より $\begin{cases}\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OP}=0\\ \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{OQ}=0\end{cases}$ よって $\begin{cases}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{a}+s\vec{b}+\vec{c})=0 & \cdots① \\ (\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\cdot\{(1-t)\vec{b}+\vec{c}\}=0 & \cdots②\end{cases}$ ここで、$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OA}$ より $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ …③ ①、③より $\|\vec{a}\|^2+s\|\vec{b}\|^2-\|\vec{c}\|=0$ $1+9s-4=0$ より $s=\frac{1}{3}$、 ②、③より $(1-t)\|\vec{b}\|^2-\|\vec{c}\|^2=0$ $9(1-t)-4=0$ より $t=\frac{5}{9}$　　以上より、$s=\frac{1}{3}$、$t=\frac{5}{9}$  （１０点）
問2	問1のとき、$\overrightarrow{OP}=\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}$、$\overrightarrow{OQ}=\frac{4}{9}\vec{b}+\vec{c}$ 点Hは線分CD上にあるから $\overrightarrow{CH}=k\overrightarrow{CD}$（$k$は実数）とおける。 よって $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CH}=\vec{c}+k(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})=k\vec{a}+k\vec{b}+(1-k)\vec{c}$ …④ また、点Hは平面OPQ上にあるから $\overrightarrow{OH}=m\overrightarrow{OP}+n\overrightarrow{OQ}$（$m$、$n$は実数）とおける。 よって $\overrightarrow{OH}=m\left(\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\vec{c}\right)+n\left(\frac{4}{9}\vec{b}+\vec{c}\right)$ $=m\vec{a}+\left(\frac{1}{3}m+\frac{4}{9}n\right)\vec{b}+(m+n)\vec{c}$ …⑤ 4点O、A、B、Cは同一平面上にはないから、④、⑤より $\begin{cases}k=m\\ k=\frac{1}{3}m+\frac{4}{9}n\\ 1-k=m+n\end{cases}$ これを解いて $k=\frac{2}{7}$、$m=\frac{2}{7}$、$n=\frac{3}{7}$ よって $\overrightarrow{CH}=\frac{2}{7}\overrightarrow{CD}$ となるから CH：HD＝2：5  （１０点）

Ⅱ［高等学校受験者］

第5問題

<table>
<tr><td>問1</td><td>

$f(-a)=\dfrac{|-a+a|}{a^2+2a+1}=0$ だから

$x\neq-a$ のとき $\dfrac{f(x)-f(-a)}{x+a}=\dfrac{\dfrac{|x+a|}{x^2+2a+1}}{x+a}=\dfrac{|x+a|}{(x+a)(x^2+2a+1)}$

よって $\displaystyle\lim_{x\to-a+0}\frac{f(x)-f(-a)}{x+a}=\lim_{x\to-a+0}\frac{x+a}{(x+a)(x^2+2a+1)}=\lim_{x\to-a+0}\frac{1}{x^2+2a+1}=\frac{1}{a^2+2a+1}$

$\displaystyle\lim_{x\to-a-0}\frac{f(x)-f(-a)}{x+a}=\lim_{x\to-a-0}\frac{-(x+a)}{(x+a)(x^2+2a+1)}\lim_{x\to-a-0}\frac{-1}{x^2+2a+1}=\frac{-1}{a^2+2a+1}$ より

$x=-a$ において、右側からの極限と左側からの極限が一致しないから

$f'(-a)$ は存在しない。

つまり、$f(x)$ は $x=-a$ で微分可能でない。

（１０点）

</td></tr>
<tr><td>問2</td><td>

$x>-a$ のとき $f(x)=\dfrac{x+a}{x^2+2a+1}$ より $f'(x)=\dfrac{(x^2+2a+1)-(x+a)\cdot 2x}{(x^2+2a+1)^2}=\dfrac{-(x-1)(x+2a+1)}{(x^2+2a+1)^2}$

$x<-a$ のとき $f(x)=\dfrac{-(x+a)}{x^2+2a+1}$ より $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x+2a+1)}{(x^2+2a+1)^2}$

よって、増減表は下のようになる。

x	$\cdots$	$-2a-1$	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	/	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大	↘	0	↗	極大	↘

ここで、$f(-2a-1)=\dfrac{(-2a-1)+a}{(-2a-1)^2+2a+1}=\dfrac{1}{2(2a+1)}$ 、$f(1)=\dfrac{1+a}{1+2a+1}=\dfrac{1}{2}$

$a>0$ であるから $f(-2a-1)<f(1)$ よって $x=1$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2}$

また、$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+a}{x^2+2a+1}=0$ 、$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-(x+a)}{x^2+2a+1}=0$ よって $x=-a$ のとき最小値0

以上より、$x=1$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2}$ 、$x=-a$ のとき最小値0

（１０点）

</td></tr>
</table>